Clase 13: La integral doble sobre regiones más generales

C.J. Vanegas

4 de junio de 2008

1. Regiones elementales

Son subconjuntos del plano xy que clasificaremos en 3 tipos

tipo 1 o y-simple Sean $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$. El conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\}$ se dice que es una región de tipo 1.

tipo 2 o x-simple Sean $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ $\forall y \in [c,d]$. El conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ se dice que es una región de tipo 2.

tipo 3 o simple D es de tipo 3 si es simultáneamente una región de tipo 1 y de tipo 2. Las curvas que acotan a las regiones D forman su frontera ∂D. Llamaremos a las regiones D, regiones elementales en el plano.

Definición 1. *Sea D una región elemental en el plano y R un rectángulo que contiene a D. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ funcion continua (y por lo tanto acotada) y*
$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ (x,y) \in D\ y\ (x,y) \in R. \end{cases}$ *(Observe que la función f^* es acotada y continua excepto quizaás en ∂D).*
Como la ∂D está formada por gráficas de funciones continuas entonces f^* es integrable sobre R.
Entonces definimos:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f^*(x,y)dA.$$

Cuando $f(x,y) \geqslant 0$ *en* D*, interpretamos* $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA$ *como el volumen de la región entre la gráfica de* f *y* D*.*
El valor de $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA$ *es independiente del rectángulo* R *que se escoja.*

Teorema 1. *Si* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\}$ *es una región de tipo 1 (tipo 2) entonces para* f *función continua en* D *se tiene:*

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

$$\left(\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy\right)$$

Demostración : Sea $R : [a,b] \times [c,d] \supset D$
$\displaystyle\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f^*(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)dydx =$
$\displaystyle\underbrace{=}_{f^*=0 \text{ si } y<\phi_1 \text{ ó } y>\phi_2} \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f^*(x,y)dydx = \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x,y)dydx$. Similarmente si D es de tipo 2. $\square$

Observación 1. *Si* $f(x,y) = 1\ \forall (x,y) \in D$ *entonces* $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA = A(D)$ *pues* $\displaystyle\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$ $= \int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x))dx = A(D)$*. (Si* D *es de tipo* 1*)*
Similarmente si D *es de tipo* 2*.*
Observe que si elegimos otro R *que contenga a* D *llegaremos al mismo resultado.*

Ejemplo 1. *Evaluar la integral iterada de* $f(x,y) = 2xy$ *en la región:*
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 2,\ \phi_1(x) = x \leqslant y \leqslant x^2 + 1 = \phi_2(x)\}$

Solución 1. $\displaystyle\iint_D 2xydA = \int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} 2xydydx = \int_{-1}^2 xy^2|_x^{x^2+1} dx = \int_{-1}^2 (x(x^2+1)^2 - x^3)dx =$
$\displaystyle\frac{(x^2+1)^3}{6} - \frac{x^4}{4}|_{-1}^2 = \frac{5^3}{6} - 4 - \frac{8}{6} + \frac{1}{4} = \frac{63}{4}$

Ejemplo 2. *Evaluar* $\displaystyle\iint_D e^{x+3y}dA$ *en donde* D *es la región limitada por la gráficas de* $y = 1$*,* $y = 2$*,* $y = x$ *e* $y = -x + 5$*.*

Solución 2. D *es de tipo* 2 $x = -y + 5 = \phi_2(y)$
$y = x = \phi_1(y)$

$$\iint_D e^{x+3y}dA = \int_1^2 \int_y^{-y+5} e^{x+3y}dxdy = \int_1^2 e^{x+3y}|_y^{-y+5}dy = \int_1^2 e^{2y+5} - e^{4y}dy = \left(\frac{1}{2}e^{2y+5} - \frac{1}{4}e^{4y}\right)|_1^2 = \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4.$$

2. Cambio en el orden de integración

Si D es una región de tipo 3 entonces es de tipo 1 y de tipo 2: $a \leqslant x \leqslant b$, $\phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$ o $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$. Por lo tanto

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} fdydx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} fdxdy$$

Entonces. Si queremos calcular una de las integrales iteradas, podemos hacerlo calculando la otra. Esta técnica se llama cambio de orden de integración.

A veces es más fáci; calcular una integral en vez de la otra.

Ejemplo 3. *Evaluar* $\iint_D (x+y)dA$ *en la región limitada superiormente por las gráficas de* $x = y^2$ *e inferiormente por la gráfica de* $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución 3.
$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = -\frac{3}{2} \\ x = 1 & y = -1 \\ x = 3 & y = 0 \\ x = 9 & y = 3 \end{array}$$

Los puntode de intersección de las dos gráficas:

También pueden encontrarse:

$$\left.\begin{array}{c} y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ x = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2} - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = 1 \pm 2 \Rightarrow x = 9 \; x = 1 \; (9,3)$$

Como región del tipo 1

$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \phi_1^1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2^1(x)$

$1 \leqslant x \leqslant 9 \quad \phi_1^2(x) \leqslant y \leqslant \phi_2^2(x)$

$\phi_1^1 = -\sqrt{x}$

$\phi_1^2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$\phi_1^2 = \sqrt{x}$

$\phi_2^2 = \sqrt{x}.$

Luego:

$$\iint_D (x+y)dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)dydx + \int_1^9 \int_{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} (x+y)dydx$$
$= \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2}|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9 xy + \frac{y^2}{2}|_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} = \int_0^1 x\sqrt{x} + \frac{x}{2} + x\sqrt{x} - \frac{x}{2}\, dx + \int_1^9 x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}) - \frac{(\frac{x}{2}-\frac{3}{2})^2}{2} dx = 46{,}9$

Si consideramos a D como una región de tipo 2:

$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \quad \psi_1(y) = y^2, \quad \psi_2(y) = 2y+3, \quad -1 \leqslant y \leqslant 3$ *Entonces*
$\iint_D x + y\, dxdy = \int_{-1}^{3} \int_{y^2}^{2y+3} (x+y)\, dxdy = \int_{-1}^{3} \frac{x^2}{2} + yx\, |_{y^2}^{2y+3} dy = \int_{-1}^{3} \frac{(2y+3)^2}{2} + y(2y+3) - \frac{y^4}{2} - y^3\, dy = 46, 9$

Ejemplo 4. *Evaluar $\iint_D xe^{y^2} dA$ en la región D del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$*

Solución 4. *Considerando a D como una región de tipo 1. $\phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$, $\phi_1(x) = x^2\, \phi_2(x) = 4$, $0 \leqslant x \leqslant 2$*
$\iint_D xe^{y^2} dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{4} dydx \leftarrow$ *no se puede evaluar por que e^{y^2} no tiene antiderivada elemental con respecto a y.*
Ahora considerando a D como una región de tipo 1. $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y)$, $\psi_1(y) = 0\, \psi_2(y) = \sqrt{y}$, $0 \leqslant y \leqslant 4$
$\iint_D xe^{y^2} dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dxdy = \int_0^4 \frac{x^2}{2} e^{y^2} |_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{y}{2} e^{y^2} dy = \frac{e^{y^2}}{4}|_0^4 = \frac{e^{16}}{4} - \frac{1}{4}$. *Cuando se están calculando áreas y volúmenes es aconsejable aprovechan las simetrías para simplificar el cálculo.*

3. Teorema del valor medio para integrales dobles

Teorema 2. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua, D= región elemental. Entonces para algún $(x_0, y_0) \in D$ se tiene: $\iint_D f(x,y)dA = f(x_0,y_0)A(D)$*

Solución 5. *Como f es continua en D entonces $m \leqslant f(x,y) \leqslant M \Rightarrow \iint_D mdA \leqslant \iint_D f(x,y)dA \leqslant \iint_D MdA \Rightarrow mA(D) \leqslant \iint_D f(x,y)dA \leqslant MA(D) \Rightarrow m \leqslant \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)dA \leqslant M \Rightarrow \exists(x_0,y_0) \in D$ tal que $f(x_0,y_0) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)dA$.*

3.1. Aplicación

Probar que $\frac{1}{6} \leqslant \iint_D \frac{dA}{y-x+3} \leqslant \frac{1}{4}$ Con D el triángulo con vértices $(0,0);(1,1);(1,0)$

Solución 6. $2 \leqslant y-x+3 \leqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y-x+3} \leqslant \frac{1}{2}$
$A(D) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6} \leqslant \iint_D \frac{dA}{y-x+3} \leqslant \frac{1}{4}$